

1 Introduction

Un circuit électrique est, comme son nom l'indique, un assemblage de fils qui relient ensemble un ou plusieurs appareils¹. L'étude des circuits électriques est très intéressante, notamment parce qu'il suffit de peu de composants pour obtenir des comportements complexes, et que, contrairement à d'autres domaines de la physique, il n'y a pas besoin d'aller très loin pour pouvoir faire du concret.

2 Rivières et cascades

Dans ce premier chapitre, on va développer une analogie qui va nous aider à comprendre beaucoup de phénomènes, et nous donner une intuition solide sur le reste du cours. On en déduira ensuite quelques lois qui, sans mauvais jeu de mots², couleront de source.

2.1 Au commencement...

Essentiellement, on peut voir un circuit électrique comme un système de tuyauteries, qui relie ensemble des appareils. Les fils correspondront aux tuyaux, les lampes à des turbines, et les générateurs à des pompes (on développera tout ça dans les paragraphes qui vont suivre). Pour caractériser ce qui se passe entre deux points du circuit, on a besoin de deux grandeurs, à savoir :

1. L'intensité, c'est le débit d'eau dans vos tuyaux. On la représente par une flèche sur le fil, dans le sens du courant.
2. La tension, c'est la différence de hauteur entre ces points du circuit. On la représente par une flèche au dessus du fil.

On démontrera formellement en fin de poly la pertinence de cette analogie, mais, pour l'instant, il faut me croire sur parole. Dès lors, on peut intuitivement assez facilement les faits qui vont suivre.

2.2 Loi des noeuds

Si vous avez un embranchement dans un système de tuyauteries, le débit d'eau qui en part est égal au débit d'eau qui y entre. D'où :

Propriété 1 : Lois des noeuds

Si on se donne un point du circuit quelconque, la somme des intensités circulant dans les fils entrants est égale à la somme des intensités circulant dans les fils sortants.

1. Là encore, au lycée, ce sont des dipôles (i.e deux bornes), mais il existe des quadripôles (quatre bornes), et plus encore. On en parlera en fin de poly.

2. Si.

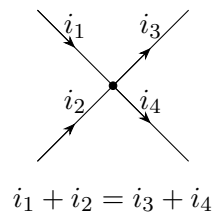


Figure 1 – La loi des noeuds en action

La loi des nœuds, ce n'est vraiment que ça : vous ne pouvez pas créer de l'eau à partir de rien ; la même chose est vraie pour le courant électrique.

2.3 Potentiel et tension

Plus haut, j'ai parlé de la tension comme une différence de hauteur entre deux points du circuits. On pourrait donc s'imaginer qu'il existe, au sein d'un circuit, une notion d'altitude - et on aurait raison. On parle de potentiel, noté souvent V_A (lire "potentiel au point A"). Dès lors, la tension U_{AB} (lire "tension entre A et B") est calculée comme $U_{AB} = V_A - V_B$. On la représente par une flèche allant du point B au point A :

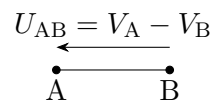


Figure 2 – Représentation standard de la tension

En particulier, cela signifie que si la tension U_{AB} est positive, $V_A > V_B$, et donc que la flèche associée à une tension positive pointe vers l'endroit de plus haut potentiel.

2.4 Loi des mailles

Supposons la chose suivante : vous partez en balade. Par principe des balades, vous partez d'un point A pour revenir audit point A ; si vous gravissez une cote lors de la promenade, vous vous attendez à en redescendre une similaire à un moment ou à un autre. Plus formellement, la somme des hauteurs montées et des hauteurs descendues est nulle sur une boucle. D'où :

Propriété 2 : Loi des mailles

Si vous considérez une boucle de courant quelconque (i.e une succession de fils qui, si on les suit, revient au point de départ), alors la somme des tensions est nulle.

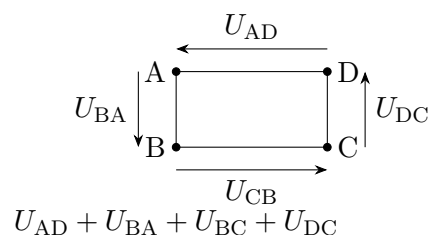


Figure 3 – La loi des mailles, elle aussi en action

Autrement dit, si vous avez suivi une succession de tuyaux jusqu'à revenir à votre point de départ, vous vous attendriez à ce que vous reveniez également à l'altitude de départ, c'est à dire que les montées et les descentes se compensent. Cela impose, bien évidemment, de compter toutes les tensions dans le même sens, quitte à ce que certaines soient négatives : il ne vous viendrait pas à l'idée de faire un bout de votre balade dans un certain sens, puis de faire le bout suivant, on ne sait comment, dans le sens contraire.

Plus généralement, si vous suivez deux chemins qui partent du même endroit et aboutissent au même endroit, la somme des montées et des descentes le long des deux chemins doivent être égales (en l'occurrence, à la différence entre l'altitude d'arrivée et celle de départ). D'où :

Propriété 3 : Loi des mailles généralisée

Si on se donne deux points du circuit A et D , la somme des tensions le long d'un chemin allant de A à D ne dépend pas du chemin choisi.

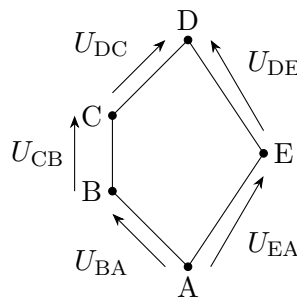


Figure 4 – $u_{DC} + u_{CB} + u_{BA} = u_{DE} + u_{EA}$

3 Resistances, fils et générateurs

3.1 Loi d'Ohm

Toujours dans notre analogie, une résistance, c'est une turbine, i.e un appareil qui exploite le courant pour fonctionner. En pratique, cela peut correspondre à une lampe, ou à de la dissipation thermique (résistance chauffante).

Propriété 4 : Loi d'Ohm

Toute résistance possède une grandeur intrinsèque, appelée également résistance et (souvent) notée R , telle que la tension U aux bornes de la résistance soit liée à l'intensité I du courant qui la traverse par $U = RI$.

L'interprétation est la suivante : si vous voulez faire circuler du courant I à travers une turbine, il va falloir pencher le tuyau pour donner de la force à l'eau, i.e augmenter la différence de hauteur U entre l'amont et l'aval, sans quoi la turbine, dont R correspond très littéralement à la difficulté qu'il y a à la faire fonctionner, va simplement refuser de tourner. La pente nécessaire augmente avec le caractère récalcitrant de la turbine.

3.2 Postulat fondamental de la tuyauterie

On va faire le postulat suivant : tout fil a une résistance nulle. En particulier, quel que soit le courant qui le traverse, $U = RI = 0 \times I = 0$. Donc, la tension aux bornes d'un fil simple est toujours nulle, ce qui signifie dans notre analogie que les simple tuyaux sont horizontaux. Pourquoi ? Parce que. C'est une idéalisation : en réalité, les fils ont une petite résistance, mais normalement, elle est négligeable par rapport aux effets du reste du circuit.³

3.3 Générateurs

Il y a (enfin je pense, je ne suis pas allé dans un magasin de bricolage depuis un bout de temps) deux types de pompes : celles qui remontent l'eau en haut d'une pente, et celles qui brassent l'eau et imposent un courant. Ce sont les générateurs de tension et de courant, qui imposent respectivement une tension à leurs bornes, et un courant. Rien de plus à savoir sur eux.

3.4 Pourquoi toutes ces analogies ?

Parce qu'apprendre bêtement et méchamment, ça n'a jamais aidé personne. Normalement, si vous gardez en tête cette idée de courants et de tuyaux, ou au moins que vous l'invoquiez de temps à autre, ça devrait vous aider, notamment à éviter les erreurs de signes. Par exemple, si toutes les tensions d'une boucle sont orientées dans le même sens, et qu'elles sont toutes positives, il y a un problème : qui monte doit redescendre. A priori, vous avez inversé le sens d'une ou plusieurs flèches.

De la même manière, dans la loi d'Ohm $U = RI$, il devient évident que la flèche de la tension doit pointer dans le sens opposé à celle du courant : l'eau, ça coule de haut en bas, pas l'inverse !

4 Simplification de circuits

C'est ici que le fun commence. On va prendre des circuits, faire n'importe quoi avec (sous prétexte de les simplifier), et montrer que ça ne change en fait rien.

4.1 Qu'est ce que simplifier un circuit ?

C'est une question qu'il faut se poser : qu'est ce que ça veut dire, "simplifier" ? A-t-on le droit de tout faire ? En fait, oui. C'est à dire que tant que **du point de vue extérieur**, votre circuit se comporte de la même manière, c'est autorisé. Comparez ça avec votre gentil fournisseur d'eau local : vous vous en fichez de la manière il arrange ses pompes et ses circuits, tant que les tuyaux arrivent aux bons endroits et que le débit reste le même. Le but est donc, étant donné quelque chose de souvent assez moche, d'aboutir à quelque chose de plus joli qui se comporte de la même manière.

4.2 Nos premiers pas : les résistances en série

Prenons le schéma suivant :

3. C'est quasiment toujours vrai dans le cadre des expériences. Ca devient faux si on considère, par exemple, des lignes haute tension.

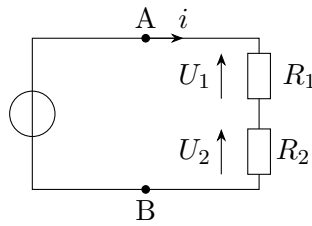


Figure 5 – De jolies résistances en série

On veut remplacer les deux résistances par une seule. Le reste du circuit (ici, un générateur, mais ça pourrait être n'importe quoi) n'est sensible qu'au courant entrant en A (et donc sortant en B) et à la tension entre A et B. Il faut que le **comportement** de notre résistance de remplacement soit le même que celui de R_1 et R_2 combinés, c-a-d que si l'on impose un certain courant i à nos résistances R_1 et R_2 , et qu'elles y répondent par une tension U_{AB} , alors imposer le même courant i à R aboutit à la même tension U_{AB} .

Dans le cas de nos deux résistances, on a $U = U_1 + U_2$.⁴ La loi d'Ohm donne $U_1 = R_1 i$, $U_2 = R_2 i$; conséquence : $U = (R_1 + R_2)i$. On reconnaît une loi d'Ohm pour une résistance imaginaire $R = R_1 + R_2$. Donc mettre deux résistances en série, c'est équivalent à en mettre une seule qui vaut la somme des deux.

4.3 Plus dur : En parallèle

Rebelotte :

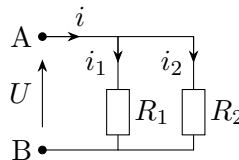


Figure 6 – De tout aussi jolies résistances en parallèle

Notez qu'ici, je n'ai pas représenté le reste du circuit : on sait simplement qu'il nous donne un courant i , et qu'il guette notre réaction via la tension U . On dispose de trois égalités :

- Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$
- Loi d'Ohm : $U = R_1 i_1$, mais aussi $U = R_2 i_2$. En effet, nos fils sont horizontaux, donc les deux résistances partent de la même altitude et terminent également à une altitude commune, quelle qu'elle soit. On peut aussi utiliser la loi des mailles pour démontrer ça.

De là, $i_1 = \frac{U}{R_1}$, $i_2 = \frac{U}{R_2}$. On réinjecte dans notre loi des noeuds :

$$i = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Soit encore :

$$U = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} * i$$

4. Pour une explication imagée de pourquoi c'est vrai, si on met deux tuyaux penchés bout à bout, la différence de hauteur totale sera la somme des différences de hauteur des deux tuyaux... logique.

On en déduit qu'une résistance de valeur $R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ convient pour remplacer nos deux résistances en parallèle.

4.4 Nombre d'or et résistance infinie

Je vais maintenant essayer de vous convaincre que cette notion d'équivalence des comportements est réellement la bonne, parce que c'est celle qui permet de résoudre les problèmes. Voici donc, sous vos yeux ébahis, la chaîne infinie de résistances !

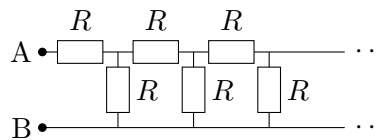


Figure 7 – Comme c'est mignon

Les petits points signifiant que le même motif se répète à l'infini.

La remarque de papi Georges

À l'aide.

En vrai ça va.

La remarque de papi Georges

Au début c'était de l'eau qui faisait glouglou pourquoi maintenant c'est cette horreur jcomprends plus rien sortez moi de là aaaah

Voyons un peu : on veut remplacer tout ce beau monde par une unique résistance $\tilde{R}$.

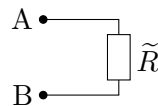


Figure 8 – Un monde idéal où il n'y a qu'une résistance

Mais comment calculer la valeur de $\tilde{R}$? En étant malin. Puisque il y a un nombre infini de motifs, un de plus ou un de moins, ça ne change rien. Donc, en particulier, puisque $\tilde{R}$ est équivalente, par hypothèse, à la chaîne au grand complet, je peux simplement ajouter un motif juste avant elle, et ça doit me donner la même chose :

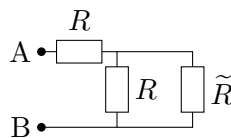


Figure 9 – Ca doit être la même chose qu'au dessus

Plus qu'à identifier. Il faut que $\tilde{R}$ soit équivalent à ça, ce qui revient à simplifier tout ça et à dire que $\tilde{R}$ doit être égal à la résistance qui en résultera. Or, ça, on sait faire. D'abord, on

simplifie les deux résistances en parallèle :

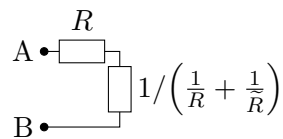


Figure 10 – Hop

Puis on fusionne les deux. Le résultat doit être $\tilde{R}$, on doit donc avoir :

$$\tilde{R} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par $R\tilde{R}$:

$$\tilde{R} = R + \frac{R\tilde{R}}{R + \tilde{R}}$$

On multiplie tout ça par $R + \tilde{R}$:

$$\tilde{R}^2 + \tilde{R}R = R\tilde{R} + R^2 + R\tilde{R}$$

Finalement :

$$\tilde{R}^2 = \tilde{R}R + R^2$$

C'est une équation du second degré d'inconnue $\tilde{R}$. On la résout, on trouve $\tilde{R} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} R$. Evidemment il faut que $\tilde{R} > 0$ (des résistances négatives, ça n'existe pas), donc on a $\tilde{R} = \varphi R$, où $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or ! Plutôt sympa, non ?

5 Allons plus loin

5.1 Condensateurs

Sauf que la vie, ce n'est pas tout rose. Parfois ça va moins bien ; parfois, il y a des condensateurs.

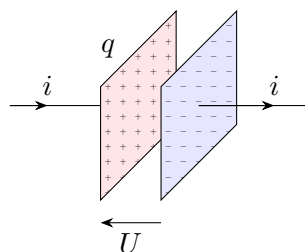


Figure 11 – Une vue d'artiste d'un condensateur

Kesako, me diriez vous. Là, l'analogie des cours d'eau montre ses limites, il va donc falloir faire preuve d'un peu plus d'imagination. Un condensateur, comme vous pouvez le voir ci-dessus, c'est deux fils, deux plaques, et une relation : $q = CU$. Les grandeurs en jeu sont les suivantes : q , c'est la charge qui est stockée dans votre condensateur, U , c'est la tension à ses

bornes, et C , c'est sa capacité, qui représente, grosso modo, à quel point le condensateur est capable d'entasser des charges sur ses plaques sans broncher.

De manière très logique, si vous entassez des plus d'un côté, des moins de l'autre, cela va créer une certaine tension U , qui témoigne du fait que les plus ont envie de rejoindre les moins (mais ils ne peuvent pas, parce qu'il y a du vide entre les deux). Rien d'étonnant, donc, à ce que cette tension augmente proportionnellement avec le nombre de charges stockée selon $U = \frac{1}{C}q$.

La remarque de papi Georges

Je connais les condensateurs, moi. Enfin, je connais $i = CU'$, je vois pas très bien pourquoi là c'est $q = CU$...

Pour la raison suivante : puisqu'on a toujours $q(t) = CU(t)$, on peut dériver la relation par rapport au temps : $q'(t) = CU'(t)$. Maintenant, qu'est ce que $q'(t)$?

Il faut (eh oui, encore) revenir à nos cours d'eau. Supposons que je sois un chercheur d'or au Yukon.⁵ Je plonge un tamis dans ma rivière, et je vois se déposer des paillettes d'or dessus.⁶ Notons, comme ci-dessus, $q(t)$ la quantité de paillettes d'or sur mon tamis à l'instant t . Si le débit de paillettes d'or dans ma rivière à l'instant t est donné par $\phi(t)$ (pour rappel, le débit, c'est la quantité de machin qui arrive par unité de temps), et que je laisse s'écouler la rivière pendant un petit laps de temps dt , je vais gagner une quantité $\phi(t) * dt$ de paillettes d'or :

$$q(t + dt) = q(t) + \phi(t)dt$$

Maintenant, si je bidouille un peu :

$$\phi(t) = \frac{q(t + dt) - q(t)}{dt}$$

Et si dt est vraiment tout, tout petit :

$$\phi(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{q(t + dt) - q(t)}{dt} = q'(t) !$$

Si on reprend notre condensateur, le débit correspond à l'intensité du courant, donc $i = q'$, et $i = CU'$!

De là, on est à la fois très contents, et très tristes. Contents, parce qu'on sait comment un condensateur se comporte (et, mieux encore, pourquoi il se comporte comme il le fait), mais aussi tristes parce que les calculs deviennent tout de suite plus durs - notamment parce qu'il faut maintenant résoudre des équations différentielles, et ça, on n'aime pas trop. Comme exemple, il y a l'archétype des circuits à base de condensateurs, à savoir le circuit RC :

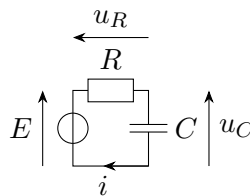


Figure 12 – Vraiment un grand classique

5. Ou ailleurs, en fonction de votre région préférée.

6. C'est non contractuel, ça ne se passe pas comme ça dans la vraie vie.

Réolvons-le, pour illustrer le comportement typique qui émane de l'usage d'un condensateur :

1. Déjà, il y a la loi des mailles, qui nous donne qu'à tout instant $E = u_R + u_C$,
2. Ensuite, on a la loi d'Ohm : $u_R = Ri$,
3. Enfin, on sait que $i = Cu'_C$.

En remontant les relations les unes dans les autres, on obtient $u_R = RCu'_C$, puis $E = RCu'_C + u_C$. On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1. Pour la résoudre, il faut les conditions initiales ; on va supposer qu'initialement, le condensateur est déchargé, i.e que $q(t = 0) = 0$. Comme $q = Cu_C$, $u_C(t = 0) = 0$. On en déduit que $u_C(t) = E(1 - \exp(-\frac{t}{RC}))$.

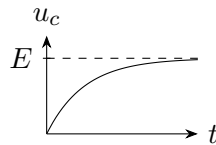


Figure 13 – Up we go

On voit que c'est moins simple qu'avec des résistances : la tension dépend du temps, et les calculs étaient moins directs. Qu'à cela ne tienne, il nous reste encore pas mal de choses à faire. Déjà, tentons d'interpréter le phénomène. D'abord, le condensateur accumule des charges (on rappelle que u_C est proportionnel à q , donc que le graphe de u_C a exactement le même aspect que celui de q). Au fur et à mesure que cela arrive, la tension à ses bornes augmente, donc le courant a de plus en plus de mal à circuler, et la charge est de plus en plus lente. Si on le laisse charger infiniment longtemps, il finira par avoir une tension E à ses bornes. Cela correspond au cas où u_C est constante, donc où $i = u'_C = 0$, et où donc le condensateur ne se charge plus du tout. Remarquons également qu'on peut définir un temps caractéristique $\tau = RC$, de sorte que :

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Ca n'a l'air de rien comme ça, mais c'est plutôt important : ça met en lumière le fait que ce n'est pas vraiment t , mais bien $\frac{t}{\tau}$ qui va jouer dans la valeur de u_C : autrement dit, l'échelle de temps à laquelle le processus a lieu est celle de τ . Il est possible de mesurer τ directement sur la figure, mais on ne va pas revenir dessus ici. Pour un ordre de grandeur, en labo, $C \sim 10nF$, $R \sim 100\Omega$, donc $\tau \sim 1\mu s$. C'est très peu. On peut aussi tracer $i(t)$, qui n'est autre que de $Cu'_C(t)$, à savoir $\frac{CE}{\tau} \exp(-t/\tau) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$:

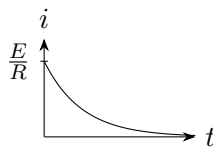


Figure 14 – Evolution du courant dans un RC

Comme dit précédemment, le courant va d'abord être élevé, puis va diminuer au fur et à mesure que le condensateur va se charger.

5.2 La bobine

La bobine, c'est un peu votre baptême de l'air de l'ésotérisme, dans la mesure où je ne peux pas formellement vous expliquer comment ça marche comme je l'ai fait pour le conden-

sateur. Il faut juste que vous me croyiez quand je vous dit qu'elle est caractérisée par une valeur L , telle que le courant i qui la traverse et l'intensité à ses bornes u sont reliées par $u = Li'$.

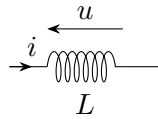


Figure 15 – Le schéma standard des bobines

Le principe d'une bobine, c'est que, quand le courant qui la traverse varie, elle n'aime pas ça. Elle va donc générer un champ magnétique⁷ qui va calmer le jeu et empêcher des variations trop brusques du courant. En pratique, ça se caractérise par une tension u proportionnelle à la variation i' du courant. Pour montrer que, conceptuellement, une bobine se comporte comme un condensateur où on aurait inversé tension et courant, on va étudier un autre exemple de circuit, à savoir le circuit RL :

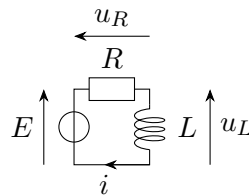


Figure 16 – Le deuxième plus grand classique des cours d'électro

Réolvons-le. On sait que :

1. Loi de mailles : $E = u_R + u_L$
2. Loi d'Ohm : $u_R = Ri$
3. Caractéristique de la bobine : $u_L = Li'$

On injecte comme précédemment les deux dernières équations dans la première, ce qui nous donne $E = Ri + Li'$. Résolvons-le. On constate que c'est également une équation différentielle d'ordre 1, dont la solution va prendre la forme $\frac{E}{R} + i_0 e^{-t/\tau}$, où cette fois $\tau = \frac{L}{R}$. Si on suppose qu'à l'instant initial, il n'y a pas de courant qui circule dans le circuit, alors on doit prendre $0 = i(0) = \frac{E}{R} + i_0 e^{-0/\tau} = \frac{E}{R} + i_0$, soit finalement $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$. On retrouve le même profil que pour la tension aux bornes du condensateur.

5.3 Continuité des grandeurs

On a pu constater ci-dessus que les conditions initiales jouent un grand rôle dans l'expression de la solution, et elles méritent qu'on s'y attarde un peu.

En général, le scénario est le suivant : avant $t = 0$, il ne se passe rien : générateur éteint, condensateur déchargé, courant nul, etc. Puis, à $t = 0$, on allume le générateur, et là tout se met en branle. Le problème, c'est que certaines grandeurs peuvent alors "sauter" soudainement ; par exemple, pour le circuit RC , le courant i passe de 0 quand $t < 0$ à $\frac{E}{R}$ directement quand $t = 0$. Il n'est donc pas possible de faire des suppositions sur leur valeur à $t = 0$ en se fondant

7. C'est là d'où vient le fait que je ne puisse pas vous expliquer : les champs magnétiques, c'est compliqué.

sur ladite valeur quand $t < 0$, puisqu'elles sont dangereusement libres de bondir. Comment alors distinguer les grandeurs "de confiance" de celles sautillantes ?

Le bon procédé est le suivant : par défaut, une grandeur peut sauter si elle le veut, et on ne peut pas lui faire confiance pour garder la même valeur à l'allumage du circuit. Les seules exceptions sont :

1. La tension aux bornes d'un condensateur : pour rappel, $q = CU$. Donc, si la tension avait l'audace de faire un saut, la charge dans stockée le condensateur ferait de même ; autrement dit, il y aurait des électrons qui apparaîtraient subitement du grand nulle part, ce qui est impossible.
2. Le courant qui traverse une bobine : la bobine n'aime vraiment pas que le courant varie trop brutalement. Or, plus brutal qu'un saut, tu meurs, et la bobine n'autorise donc pas ce genre de comportement.

Si vous relisez les paragraphes précédents, vous vous rendrez compte que c'est uniquement sur ces grandeurs que j'ai raisonné pour déterminer les conditions initiales, par exemple en disant que le condensateur était initialement déchargé : en vérité, je sous-entendais "il était déchargé avant, il n'y a pas de raison qu'il se charge magiquement à $t = 0$ ".

6 Aspect énergétique

6.1 Chauffage électrique

Un grand aspect de la physique est la considération de la conservation de l'énergie : on aime savoir d'où l'énergie vient, où elle part, et comment. C'est très utile dans beaucoup de domaines, où regarder la répartition de l'énergie dans le système étudié aide à comprendre les mécanismes en action, et l'électrocinétique ne déroge pas à la règle. Prenons l'exemple d'un circuit avec un générateur et une résistance :

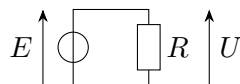


Figure 17 – Un radiateur

Payant la facture EDF, on est en droit de se demander que devient l'énergie que je fournis à mon circuit en branchant le générateur au secteur. La règle d'or est la suivante :

Propriété 5 : Puissance consommée

Si on se donne un dipôle parcouru par une tension U et un courant I , la puissance consommée par le dipôle est $P = UI$.

Plusieurs rappels sont nécessaires ici. D'une part, il est très important de bien orienter la tension et l'intensité : elles doivent être orientées dans le sens contraire pour que la formule soit valide, ou alors il faut ajouter un moins (ce qui revient à changer le sens d'une des flèches). D'autre part, un dipôle peut tout à fait fournir de l'énergie au circuit ; dans ce cas, on aura que la puissance consommée sera négative.

Revenons à ma résistance. La loi des mailles donne $U = E$. Donc mon générateur consomme une puissance $-E * I$ (le moins venant du fait que la flèche du courant est dans le même sens

que celle de tension), c'est à dire qu'il fournit une puissance EI , et ma résistance consomme une puissance UI . Le compte est bon, tout ce qui est fourni par le générateur est consommé par ma résistance (en l'occurrence, elle dissipe cette énergie sous forme de chaleur par effet Joule).

6.2 Relation énergie-puissance

On va effectuer un raisonnement très similaire à la démonstration de $i = q'$ pour relier l'énergie utilisée consommée par un dipôle et la puissance qu'il consomme. Supposons qu'à l'instant t , mon dipôle ait déjà consommé un total d'énergie $e(t)$. Si je laisse s'écouler une petite durée dt - pour rappel, la puissance consommée, c'est l'énergie consommée par unité de temps - il aura consommé une addition de $P(t)dt$. Donc $e(t + dt) = e(t) + P(t)dt$. Là encore, je peux faire passer les termes qui m'arrangent à droite, et dire que dt est tout petit pour obtenir :

$$P(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{e(t + dt) - e(t)}{dt} = e'(t) !$$

6.3 Condensateur : le retour

Hop, retour sur le RC .

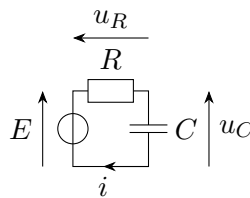


Figure 18 – L'épisode II

Voyons un peu où va l'énergie dans ce cas-ci :

1. Comme avant, le générateur fournit une puissance Ei ,
2. De même, la résistance consomme $u_R i$. Sauf que cette fois, le compte n'y est pas, parce que le condensateur utilise de l'énergie pour se charger. En parlant du loup :
3. Le condensateur est traversé par un courant $i = Cu'_C$, et la tension à ses bornes vaut, par définition, u_C . Donc il consomme une puissance $Cu_C u'_C$.

Et c'est là que ça devient intéressant. Dans $Cu_C u'_C$, on reconnaît une forme bien connue : ff' , qui n'est autre que la dérivée de $\frac{1}{2}f^2$. Ici donc, on a $P_C = Cu_C u'_C = (\frac{1}{2}Cu_C^2)'$. Or on a vu que la puissance était la dérivée de l'énergie, ce qui s'écrit ici :

$$P(t) = (\frac{1}{2}Cu_C^2)' \text{ mais aussi } P(t) = e'(t)$$

Autrement dit, l'énergie totale consommée par le condensateur s'identifie à $\frac{1}{2}Cu_C^2$: $e_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2$! Si on se rappelle des résultats qu'on avait obtenu, le fait que la tension augmente petit à petit aux bornes du condensateur lors de sa charge signifie en fait qu'il est en train d'accumuler de l'énergie.

Il est possible de suivre exactement le même raisonnement pour la bobine : une bobine traversée par un courant i possède une tension valant $u_L = Li'$ à ses bornes. Donc elle

consomme une puissance valant $P_L = Li i' = (\frac{1}{2} Li^2)'$. On identifie donc également l'énergie qu'elle emmagasine comme $e_L = \frac{1}{2} Li^2$.

6.4 Rendement

Une question qu'on peut se poser est : quelle est la part d'énergie qui est réellement utilisée pour charger notre condensateur, et quelle est la part dissipée par la résistance pendant la charge ?

Pour y répondre, il n'y a qu'à calculer la quantité d'énergie totale fournie par le générateur. On sait que la tension à ses bornes est toujours égale à E . Par ailleurs, le courant, comme partout ailleurs dans le circuit, vaut $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$. Donc $P(t) = \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau}$. On veut connaître l'énergie dépensée entre les instants $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$, c'est à dire calculer :

$$e(t \rightarrow \infty) - e(t = 0)$$

Qu'on peut écrire comme :

$$\int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} e'(t) dt = \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} P(t) dt = \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau} dt$$

C'est un calcul de primitive classique :

$$E_{totale} = \left[-\frac{E^2 \tau}{R} e^{-t/\tau} \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{E^2 \tau}{R}$$

Et, en utilisant que $\tau = RC$, $E_{totale} = CE^2$. Ce qui est exactement deux fois l'énergie accumulée par le condensateur : $e_C = \frac{1}{2} CE^2$! Donc la moitié de l'énergie sert à charger le condensateur, et l'autre moitié est dissipée par la résistance.

6.5 Eclairage de secours

L'énergie stockée dans les condensateurs (ainsi que dans les bobines) peut être restituée. Pour illustrer cela, reprenons, **encore**, notre circuit RC . Supposons que notre condensateur a fini de charger, et que notre résistance correspond désormais à une lampe. Les plombs sautent dans le bâtiment : le générateur s'éteint donc, et nous obtenons :

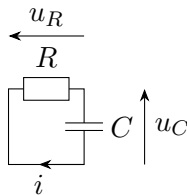


Figure 19 – Sans électricité, c'est plus compliqué

Voyons comment notre circuit réagit. On a :

1. Loi des mailles : $u_R + u_C = 0$,
2. Loi d'Ohm : $u_R = Ri$
3. Condensateur : $i = C u_C'$

Conséquence : $RCu'_C + u_C = 0$. En résolvant, compte tenu de la condition initiale $u_C(t=0) = E$ (car on avait supposé que le condensateur était chargé à bloc avant la coupure), on obtient $u_C(t) = Ee^{-t/\tau}$, où $\tau = RC$. Le condensateur va donc se décharger, et l'énergie qui y est accumulée, $\frac{1}{2}CE^2e^{-2t/\tau}$, se dissiper en alimentant la lampe.

Si on résume, lorsque l'électricité fonctionne correctement, le condensateur se charge. Quand les plombs sautent, il se décharge, et ainsi la lampe s'allume. Si votre condensateur a une capacité suffisante pour maintenir la lampe allumée longtemps, vous obtenez un éclairage de secours.

7 Un peu d'imagination

7.1 Circuit RLC

Maintenant que l'on maîtrise bobine et condensateur, faisons un crossover et considérons le circuit suivant :

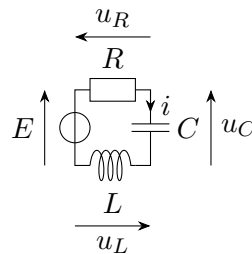


Figure 20 – Le troisième plus grand classique des cours d'électro

Circuit qui est appelé, très inventivement, circuit RLC. Comme d'habitude, on va lister ce que l'on sait⁸ :

1. Loi des mailles : $E = u_R + u_L + u_C$,
2. Loi d'Ohm : $u_R = Ri$,
3. Caractéristique de la bobine : $u_L = Li'$,
4. Caractéristique du condensateur : $i = Cu'_C$.

On dérive la loi des mailles, et on y remplace les tensions en utilisant les autres relations :

$$0 = u'_R + u'_L + u'_C$$

$$0 = (Ri)' + (Li')' + \frac{i}{C}$$

$$0 = Ri' + Li'' + \frac{i}{C}$$

$$LCi'' + RCi' + i = 0$$

8. Quand je dis "ce que l'on sait", c'est TOUT ce que l'on sait; mieux vaut trop que pas assez. De manière générale, ça se fait en appliquant une loi des mailles ou une loi des nœuds, puis en rappelant ce qu'on sait sur les rapports entre tension et courant aux bornes des dipôles concernés. Je vous encourage par ailleurs à le faire vous mêmes avant de lire la correction !

Et hop, une équation différentielle sur i . Pour que ce soit plus facile à écrire, on posera $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$, de sorte que⁹ :

$$i'' + 2\xi\omega i' + \omega^2 i = 0$$

7.2 De la résolution d'équations différentielles

On va chercher des solutions sous forme d'exponentielles, c-a-d qu'on veut trouver λ tel que $e^{-\lambda t}$ soit solution.¹⁰ L'intérêt principal, c'est que si $i(t) = i_0 \exp(\lambda t)$, alors $i'(t) = \lambda i(t)$, $i''(t) = \lambda^2 i(t)$. Autrement dit, la dérivation se transforme en multiplication par λ , qui est bien plus facile à manipuler. Injectons cela dans l'équation, et voyons :

$$(\lambda^2 - 2\xi\omega\lambda + \omega^2)i(t) = 0$$

Comme $i(t) \neq 0$ (c'est une exponentielle!), on peut simplifier :

$$\lambda^2 - 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

Et on se retrouve avec une simple équation polynomiale sur λ , qu'on peut facilement résoudre :

$$\lambda_{\pm} = \frac{2\xi\omega \pm \sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = \omega (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$$

La remarque de papi Georges

Houlà, mais qui me dit que sous la racine, c'est positif? Et est-ce que je dois choisir le signe plus, ou moins?

Et justement, c'est là que les choses deviennent intéressantes. Traitons le cas $\xi \geq 1$: la chose sous la racine est alors positive. Les deux choix λ_+ et λ_- donnent deux types de solutions :

$$i_+(t) = i_1 e^{-\lambda_+ t} \quad i_-(t) = i_2 e^{-\lambda_- t}$$

Maintenant, nous allons faire usage du principe de superposition, qui nous dit grosso modo la chose suivante : "si dans un circuit électrique vous avez deux solutions de l'équation différentielle associée, leur somme est également solution". Autrement dit,

$$i(t) = i_1 \exp(-\lambda_+ t) + i_2 \exp(-\lambda_- t)$$

doit toujours être solution, et on constate qu'en prenant i_1 (ou i_2) nul, on retombe sur les solutions individuelles : c'est donc la forme la plus générale de solution. Les constantes i_1 et i_2 restent à déterminer. Elles dépendent de $i(t=0)$ et $i'(t=0)$. Supposons qu'à l'instant $t=0$ aucun courant ne circule, i.e $i(t=0) = 0$, et que le condensateur soit initialement déchargé : $u_C(t=0) = 0$. Dans ce cas, la loi des mailles écrite à l'instant initial donne :

$$E = u_R(t=0) + u_L(t=0) + u_C(t=0) = Ri(t=0) + Li'(t=0) + u_C(t=0)$$

9. Je vous laisse vous convaincre que c'est exactement la même chose

10. On pourrait se demander : pourquoi ne chercher que de telles solutions? En fait, on peut démontrer mathématiquement que ce sont les seules, mais ça n'a que peu d'intérêt ici.

Comme on a supposé $i(t=0) = u_C(t=0) = 0$, il vient $i'(t=0) = E/L$. D'où :

$$0 = i_1 + i_2, \quad E/L = -\lambda_+ i_1 + -\lambda_- i_2$$

$$i_1 = -i_2, \quad E/L = -(\lambda_+ - \lambda_-) i_1$$

$$i_1 = -\frac{E}{2L\omega\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad i_2 = -i_1$$

Finalement :

$$i(t) = \frac{E}{2L\omega\sqrt{\xi^2 - 1}} (e^{-\lambda_- t} - e^{-\lambda_+ t})$$

Vers quoi tend $i(t \rightarrow \infty)$? On a $\lambda_+ = \omega(1 + \sqrt{\xi^2 - 1})$ qui est clairement positif, donc $e^{-\lambda_+ t}$ est une exponentielle décroissante. Par ailleurs, $\lambda_- = \omega(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$. Comme $\sqrt{\xi^2 - 1} < \sqrt{\xi^2} = \xi$, on a $\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} > 0$, donc $-\lambda_- < 0$. Autrement dit, on a deux exponentielles décroissantes, et c'est plutôt rassurant, parce qu'autrement on aurait $i(t)$ qui se comporterait comme une exponentielle croissante et divergerait.¹¹ On a vu que $i'(t=0) = E/L > 0$, donc on va avoir une phase de croissance de i , avant qu'il se redirige asymptotiquement vers 0 :

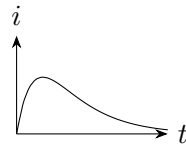


Figure 21 – Evolution du courant dans le circuit RLC

Ce qui se passe, c'est que le condensateur, initialement déchargé, va essayer de se charger. Pour ce faire, il va avoir besoin de courant. Dans un circuit RC classique, il n'y a pas de bobine, et le courant va directement aller à E/R pour charger le plus efficacement possible le condensateur. Ici, il y a une bobine qui refuse que le courant varie brusquement. Comme initialement le courant était nul, il doit augmenter doucement à partir de 0. Ce qui explique le comportement différent de i proche de $t = 0$. On voit cependant qu'à partir d'un certain temps, c'est le comportement classique de décroissance exponentielle de i qui va reprendre le dessus.

7.3 Amortir ou ne pas amortir, telle est la question

Le coefficient ξ est connu sous le nom d'amortissement du système. Figurez-vous une porte munie du petit boîtier gris, là, qui ralentit son mouvement¹². Vous l'ouvrez puis la relâchez : si le boîtier gris fait bien son travail, et qu'il amortit la porte, elle va se refermer doucement, normalement sans claquer, et, surtout, sans faire un mouvement de va-et-vient. Au contraire, si le boîtier fait mal son travail, la porte va arriver à toute vitesse au niveau de l'embrasure, dépasser le chambranle, potentiellement casser les lunettes du copain qui se trouve de l'autre côté, revenir vers vous, potentiellement casser les vôtres, et ainsi de suite. A terme, elle va se stabiliser, mais ça risque de prendre du temps.

11. Ce qui serait étrange : on serait capable de générer un courant arbitrairement fort avec rien d'autre que trois petites composantes et un générateur...

12. Normalement, vous voyez de quoi je parle, il y en a sur toutes les grosses portes des lycées.

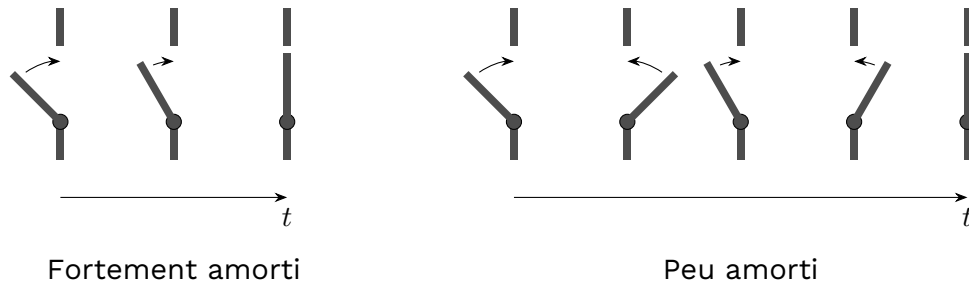


Figure 22 – Les portes de mon lycée, vues de dessus

En ce qui nous concerne, c'est la même chose, mais le courant joue le rôle de la porte. Si le système est bien amorti, c'est-à-dire que ξ est grand, grand signifiant ici "supérieur à 1"¹³, alors on a le comportement qu'on a étudié ci-dessus : le courant va augmenter, puis diminuer tranquillement. Sinon, le courant va osciller : il va aller dans un sens, puis changer de sens, puis rechanger, et ainsi de suite, jusqu'à se stabiliser à 0. Maintenant, comment cela se traduit-il dans nos équations ? Qu'est-ce que ça a à voir avec le changement de signe de la chose sous la racine quand $\xi < 1$?

7.4 L'exponentielle complexe

Il va me falloir vous parler un peu de mathématiques, et en particulier de nombres complexes. Si vous avez déjà fait ça, c'est très bien, même si vous apprendrez peut-être deux trois trucs quand même ; sinon, vous allez découvrir ce que c'est ici et maintenant.

Historiquement, l'introduction des nombres complexes étaient très tumultueuse, et un certain nombre de mathématiciens se sont tapés dessus à leur sujet. L'idée est que, pour résoudre des équations, on avait besoin de pouvoir fournir une racine carrée aux nombres négatifs.¹⁴ Aussitôt dit, aussitôt fait¹⁵, on a décrété qu'on introduirait une quantité j , qu'on peut voir comme une sorte de variable (au sens où on ne peut pas la simplifier ou lui attribuer une valeur réelle) qui vérifie $j^2 = -1$. De là, les nombres complexes, c'est tout ce qui s'écrit sous la forme $a + jb$, avec a et b deux réels. a est appelé partie réelle, b partie imaginaire.

La remarque de papi Georges

D'habitude j'utilise plutôt i , pourquoi là c'est j ?

Parce que i est déjà utilisé pour le courant, donc en physique (et surtout en électrocinétique), on le note j plutôt que i . Mais c'est la même chose. Reprenons nos équations sur $\lambda_{\pm}$, avec cette fois $\xi < 1$:¹⁶

$$\lambda_{\pm} = \omega(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$$

13. Je vous l'accorde, c'est pas très impressionnant 1 comme chiffre.

14. A l'origine, ils furent introduits résoudre les équations polynomiales de degré trois, mais maintenant on s'en sert partout.

15. Encore une fois, non. Il a fallu de nombreuses années avant qu'il soient accepté par la communauté des mathématiciens de l'époque.

16. Les petit.e.s malig.n.e.s auront remarqué que je n'ai pas traité le cas $\xi = 1$. Il se comporte exactement comme les cas $\xi > 1$, avec quelques subtilités purement calculatoires que je n'ai pas envie d'introduire (donc on ne le fera pas puisque c'est mon poly et que je fais ce que je veux).

L'équation dit "il me faut des racines carrées de $\xi^2 - 1$ ". On peut simplement prendre une racine carrée de $1 - \xi^2 > 0$, qu'on va noter δ , et ajouter j devant : $(j\delta)^2 = j^2\delta^2 = -\delta^2 = \xi^2 - 1$. Par ailleurs, $-j\delta$ convient aussi. Finalement :

$$\lambda_{\pm} = \omega(-\xi \pm j\delta)$$

Mais maintenant il faut mettre tout ça dans une exponentielle : que pourrait bien signifier $e^{\lambda_{\pm}t}$? Déjà, on peut utiliser $e^{x+y} = e^x e^y$, et séparer la partie classique $-\omega\xi$ de la partie imaginaire $\pm i\omega\delta$:

$$e^{\lambda_{\pm}t} = e^{-\omega\xi t} e^{\pm i\omega\delta t}$$

On veut déterminer $f(t) = e^{it}$. La propriété qu'on a très envie que cette fonction vérifie, c'est que $f'(t) = if(t)$, comme toute exponentielle qui se respecte. A priori, $f(t)$ est un nombre complexe quelconque, qu'on peut donc écrire :

$$f(t) = g(t) + jh(t)$$

Dériver ou multiplier par j donnent respectivement :

$$f'(t) = g'(t) + jh'(t) \quad jf(t) = jg(t) + j^2h(t) = -h(t) + jg(t)$$

Maintenant, si on regarde séparément la partie réelle et celle imaginaire, on obtient :

$$g'(t) = -h(t) \quad h'(t) = g(t)$$

Mmh. Grosso modo, cela signifie que la dérivation intervertit (au signe près) g et h . Comme $\cos$ et $\sin$, en fait : $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$. On décide donc que :

$$e^{jt} = \cos(t) + j \sin(t)$$

Et, en remplaçant t par $\pm\delta t$:

$$e^{\pm j\delta\omega t} = \cos(\pm\delta\omega t) + j \sin(\pm\delta\omega t) = \cos(\delta\omega t) \pm j \sin(\delta\omega t)$$

Puisque $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$. On voit assez bien d'où le mouvement oscillant va venir : Les oscillations elles-mêmes viennent des fonctions trigonométriques cachées dans les exponentielles complexes $e^{\pm j\delta\omega t}$ tandis que l'exponentielle décroissante réelle $e^{-\omega\xi t}$ va atténuer petit à petit les amplitudes de ces oscillations.

Finissons de résoudre tout ça. Bien évidemment, le courant qui passe dans mon circuit doit être réel. Il va donc falloir que je combine correctement les exponentielles pour ce faire. Or, je vous laisse faire les calculs :

$$\frac{1}{2}(e^{j\delta\omega t} + e^{-j\delta\omega t}) = \cos(\delta\omega t)$$

$$\frac{-j}{2}(e^{j\delta\omega t} - e^{-j\delta\omega t}) = \sin(\delta\omega t)$$

Autrement dit, je vais pouvoir former ma solution à partir de $\cos$ et de $\sin$, sans oublier le préfacteur exponentiel $\exp(-\omega\xi t)$:

$$i(t) = e^{-\omega\xi t}(i_1 \cos(\omega\delta t) + i_2 \sin(\omega\delta t))$$

Et on retrouve effectivement nos oscillations décroissantes ! En reprenant les conditions initiales du circuit, on peut déterminer les valeurs de i_1 et i_2 (attention à n'utiliser que les grandeurs de confiance $u_C(t=0)$ et $i(t=0)$ pour cela !), mais on ne le fera pas là car c'est assez calculatoire. Tout ce qui compte, c'est que vous vous souveniez que les solutions ont cette tête :

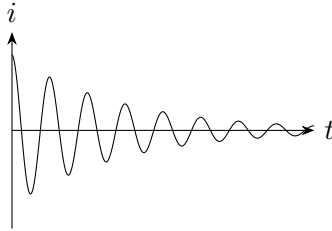


Figure 23 – Ma porte oscillante métaphorique

7.5 Qui amortit quoi ?

Autrement dit, quel est l'analogue électrique du boîtier gris de ma porte ? Il faut voir cela en termes énergétiques : pour freiner la porte, le boîtier dissipe son énergie sous forme de chaleur (en faisant se frotter fort des pièces mécaniques : c'est le principe des freins). Ici, c'est exactement la même chose : c'est la résistance R qui va dissiper l'énergie du circuit sous forme de chaleur par effet Joule. Rappelons que l'amortissement ξ est proportionnel à R : $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$; autrement dit, plus la résistance dissipe efficacement l'électricité, plus le circuit va avoir un comportement amorti. Au contraire, si la résistance est faible, le circuit va conserver son énergie, et va donc être obligé de faire un mouvement de va et vient.¹⁷

Et si la résistance est nulle ? Dans ce cas, $\xi = 0$, et les solutions sont de la forme :

$$i(t) = e^{0 \cdot \omega t} (i_1 \cos(\omega \delta t) + i_2 \sin(\omega \delta t)) = i_1 \cos(\omega \delta t) + i_2 \sin(\omega \delta t)$$

Le mouvement oscille pour toujours, et ne s'arrête jamais !

Une remarque intéressante est le constat que le comportement (amorti ou oscillant) de votre porte métaphorique ne dépend pas de la vitesse à laquelle vous la lâchez initialement, ni d'où vous la lâchez. Vous aurez beau la lancer de toutes vos forces en direction du visage de votre pire ennemi.e, si elle est conçue pour ne pas osciller, elle n'oscillera pas. Et, inversement, même si vous prenez garde à être très délicat.e lorsque vous refermez une porte à battant, elle battra. C'est dû au fait qu'encore une fois ce qui compte c'est la dissipation d'énergie : un frein dissipe une énergie proportionnelle à la vitesse de votre porte, donc si vous la lancez vite, il dissipera d'autant plus d'énergie, et elle ralentira d'autant plus.

¹⁷. De la même manière que la porte, lancée à pleine vitesse, ne va pas miraculeusement s'arrêter à mi chemin : elle a de l'énergie, elle la garde.